Pruebas de Hipótesis

Pruebas de Hipótesis

Otra manera de hacer inferencia es haciendo una afirmación acerca del valor que el parámetro de la población bajo estudio puede tomar. Esta afirmación puede estar basada en alguna creencia o experiencia pasada que será contrastada con la evidencia que nosotros obtengamos a través de la información contenida en la muestra. Esto es a lo que llamamos *Prueba de Hipótesis*

Una prueba de hipótesis comprende cuatro componentes principales:

- **Hipótesis Nula**
- **Hipótesis Alternativa**
- **Estadística de Prueba**
- **Región de Rechazo**

La *Hipótesis Nula*, denotada como H_0 siempre especifica un solo valor del parámetro de la población si la hipótesis es simple o un conjunto de valores si es compuesta (es lo que queremos desacreditar)

$\boxed{H_0 : \mu = \mu_0}$ $\boxed{H_0 : \mu \leq \mu_0}$ $\boxed{H_0 : \mu \geq \mu_0}$

La *Hipótesis Alternativa*, denotada como H_1 es la que responde nuestra pregunta, la que se establece en base a la evidencia que tenemos. Puede tener cuatro formas:

$$\boxed{\begin{array}{ll} H_1 : \mu = \mu_1 & H_1 : \mu > \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 & H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}}$$

v.rohen

Como las conclusiones a las que lleguemos se basan en una *muestra*, hay posibilidades de que nos equivoquemos.

Dos decisiones correctas son posibles:

Rechazar H_0 cuando es falsa

No Rechazar H_0 cuando es verdadera.

Dos decisiones incorrectas son posibles:

Rechazar H_0 cuando es verdadera

No Rechazar H_0 cuando es falsa.

v.rohen

Tamaño de los errores al tomar una decisión incorrecta en una Prueba de Hipótesis

	H_0 Verdadera	H_0 Falsa
Rechazamos H_0	Error Tipo I P(error Tipo I) = α	Decisión Correcta
No Rechazamos H_0	Decisión Correcta	Error Tipo II P(error Tipo II) = β

v.rohen

La Probabilidad de cometer un error Tipo I se conoce como *Nivel de Significancia*, se denota como α y es el tamaño de la región de rechazo

El complemento de la región de rechazo es $1-\alpha$ y es conocido como el *Coeficiente de Confianza*

En una prueba de Hipótesis de dos colas la región de no rechazo corresponde a un intervalo de confianza para el parámetro en cuestión

La *Región de Rechazo* es el conjunto de valores tales que si la prueba estadística cae dentro de este rango, decidimos rechazar la Hipótesis Nula

Su localización depende de la forma de la Hipótesis Alternativa:

Si $H_1 : \mu > \mu_0$ entonces la región se encuentra en la cola derecha de la distribución de la estadística de prueba.

Si $H_1 : \mu < \mu_0$ entonces la región se encuentra en la cola izquierda de la distribución de la estadística de prueba

Si $H_1 : \mu \neq \mu_0$ entonces la región se divide en dos partes, una parte estará en la cola derecha de la distribución de la estadística de prueba y la otra en la cola izquierda de la distribución de la estadística de prueba.

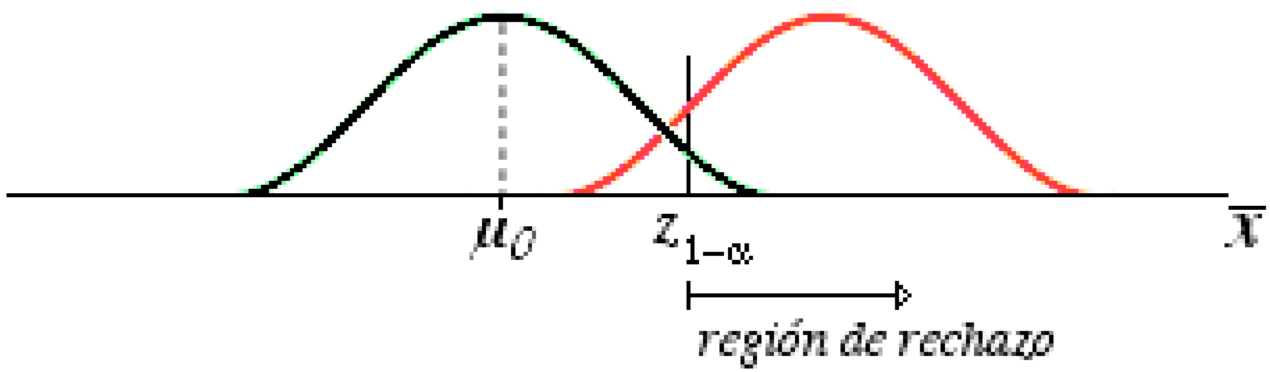
Conclusiones de una Prueba de Hipótesis

Si *rechazamos la Hipótesis Nula*, concluimos que "hay suficiente evidencia estadística para inferir que la hipótesis nula es falsa"

Si *no rechazamos la Hipótesis Nula*, concluimos que "no hay suficiente evidencia estadística para inferir que la hipótesis nula es falsa"

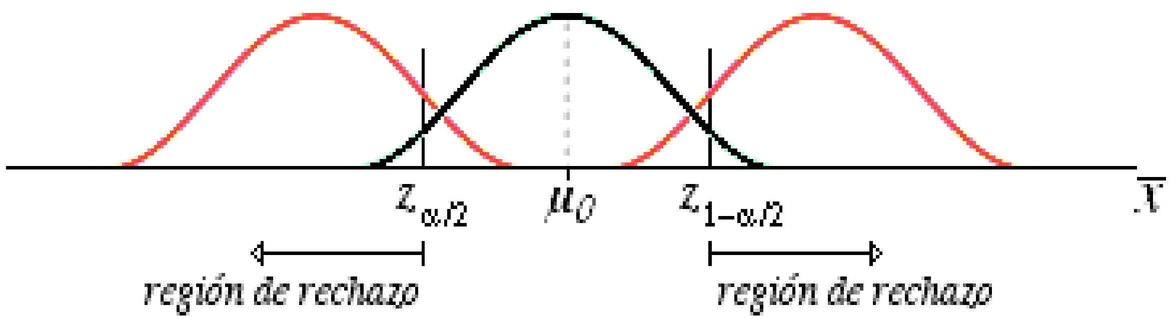
v.rohen

$$H_1 : \mu > \mu_0$$



v.rohen

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$



v.rohen

La *Estadística de Prueba* es una estadística que se deriva del estimador puntual del parámetro que estemos probando y en ella basamos nuestra decisión acerca de si rechazar o no rechazar la Hipótesis Nula

Ejemplo:

$$\boxed{Z = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}}$$

Siempre se calcula considerando la Hipótesis Nula como si fuera verdadera.

v.rohen

Para el caso específico de la media poblacional μ, el estimador es $\hat{\mu} = \overline{X}$ cuya varianza es σ^2 / n.

Supondremos que conocemos la varianza poblacional σ^2

Hipótesis			
Nula		$H_0 : \mu = \mu_0$	
Alternativa	$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$
Estadística de Prueba		$Z = \dfrac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma_{\overline{X}}}$	
R. Rechazo	$\{Z : Z < Z_\alpha\}$	$\{Z : Z > Z_{1-\alpha}\}$	$\{Z : \lvert Z \rvert > Z_{1-\alpha/2}\}$

v.rohen

Si nuestro propósito está en la proporción de éxitos *p*, el estimador será $\hat{p} = \frac{X}{n}$ que tiene distribución aproximada normal con media *p* y varianza *p(1-p)/n*, donde *p* toma el valor propuesto por la hipótesis nula.

Hipótesis			
Nula		$H_0 : p = p_0$	
Alternativa	$H_1 : p < p_0$	$H_1 : p > p_0$	$H_1 : p \neq p_0$
Estadística de Prueba		$Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sigma_{\hat{p}}}$	
R. Rechazo	$\{Z : Z < Z_\alpha\}$	$\{Z : Z > Z_{1-\alpha}\}$	$\{Z : \lvert Z \rvert > Z_{1-\alpha/2}\}$

v.rohen

Cuando la varianza poblacional no es conocida, sabemos que la podemos estimar con la varianza muestral, siendo la distribución de la estadística de prueba una *t - Student* con *n-1* grados de libertad.

Hipótesis			
Nula		$H_0 : \mu = \mu_0$	
Alternativa	$H_1 : \mu < \mu_0$	$H_1 : \mu > \mu_0$	$H_1 : \mu \neq \mu_0$
Estadística de Prueba		$T = \dfrac{\hat{\mu} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$	
R. Rechazo	$\{T : T < t_{n-1,\alpha}\}$	$\{T : T > t_{n-1,1-\alpha}\}$	$\{T : \lvert T \rvert > t_{n-1,1-\alpha/2}\}$

v.rohen

Para el caso de comparar las medias de dos poblaciones independientes (tamaño de muestras grande), y las varianzas son conocidas, la prueba se realiza de la siguiente manera:

Hipótesis			
Nula	$H_0 : \mu_1 = \mu_2$		
Alternativa	$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
Estadística de Prueba	$Z = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\sigma_{\overline{X}_1} + \sigma_{\overline{X}_2}}}$		
R. Rechazo	$\{Z : Z < Z_\alpha\}$	$\{Z : Z > Z_{1-\alpha}\}$	$\{Z : \lvert Z \rvert > Z_{1-\alpha/2}\}$

v.rohen

Si la comparación es de proporciones de dos poblaciones independientes, la prueba será

Hipótesis			
Nula		$H_0 : p_1 = p_2$	
Alternativa	$H_1 : p_1 < p_2$	$H_1 : p_1 > p_2$	$H_1 : p_1 \neq p_2$
Estadística de Prueba		$Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	
R. Rechazo	$\{Z : Z < Z_\alpha\}$	$\{Z : Z > Z_{1-\alpha}\}$	$\{Z : \lvert Z \rvert > Z_{1-\alpha/2}\}$

donde $\hat{p} = \dfrac{X_1 + X_2}{n_1 + n_2}$.

Recordemos que para usar la aproximación normal es necesario que $n_i p > 5$ **, donde** n_i **es el tamaño de la muestra *i* (*i=1,2*)**

v.rohen

Para la diferencia de medias podemos suponer que las varianzas poblacionales son iguales (este hecho se tiene que probar como se muestra mas adelante).

Hipótesis			
Nula		$H_0 : \mu_1 = \mu_2$	
Alternativa	$H_1 : \mu_1 < \mu_2$	$H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
Estadística de Prueba		$T = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$	
R. Rechazo	$\{T : T < t_{n-1,\alpha}\}$	$\{T : T > t_{n-1,1-\alpha}\}$	$\{T : \lvert T \rvert > t_{n-1,1-\alpha/2}\}$

Donde $\boxed{S_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ **es el estimador de varianza mínima para** σ^2**.**

La prueba se basa en una *t* con *n_1-n_2-2* grados de libertad.

v.rohen

Para la diferencia de medias cuando nuestras muestras están pareadas (misma medición, misma unidad experimental, circunstancias diferentes) podemos usar la prueba de diferencia de medias. Sin embargo debemos notar que la varianza de la diferencia de medias lleva implícita la covarianza entre los estimadores $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ $\left(\sigma_D^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\right)$

Hipótesis	
Nula	$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \Leftrightarrow \quad H_0 : \mu_D = 0 \quad \left(\mu_D = \mu_1 - \mu_2\right)$
Alternativa	$H_1 : \mu_D < 0 \qquad H_1 : \mu_D > 0 \qquad H_1 : \mu_D \neq 0$
Estadística de Prueba	$T = \dfrac{\overline{D}}{S_D / \sqrt{n}}$
R. Rechazo	$\left\{T : T < t_{n-1,\alpha}\right\} \quad \left\{T : T > t_{n-1,1-\alpha}\right\} \quad \left\{T : \lvert T \rvert > t_{n-1,1-\alpha/2}\right\}$

v.rohen

Con frecuencia nuestro interés está en el parámetro de variabilidad, en cuyo caso podemos hacer las pruebas sobre un valor específico de la varianza poblacional. Para ello nos basamos en el estimador del estimador de σ^2 que es una χ^2 con *n-1* grados de libertad.

Hipótesis			
Nula	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$		
Alternativa	$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
Estadística de Prueba	$X^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$		
R. Rechazo	$\left\{X^2 : X^2 < \chi^2_{n-1,\alpha}\right\}$	$\left\{X^2 : X^2 > \chi^2_{n-1,1-\alpha}\right\}$	$\left\{\begin{matrix} X^2 : X^2 < \chi^2_{n-1,\alpha/2} \text{ ó} \\ X^2 : X^2 > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} \end{matrix}\right\}$

v.rohen

El supuesto de varianzas iguales que se ha hecho al comparar las medias de dos poblaciones, deberá ahora probarse mediante la estadística F

Hipótesis			
Nula		$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	
Alternativa	$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
Estadística de Prueba		$F = \dfrac{\max\left\{ S_1^2, S_2^2 \right\}}{\min\left\{ S_1^2, S_2^2 \right\}}$	
R. Rechazo	$\left\{ F : F > F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha} \right\}$		$\left\{ F : F > F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2} \right\}$

v.rohen

valor-p **es el nivel de significancia alcanzado.**

El nivel de significancia más pequeño al cual los datos observados indican que la hipótesis nula debe ser rechazada.

Si *W* es una estadística de prueba y w_0 es el valor observado, el *valor-p* nos indica la probabilidad de que w_0 sea un valor extremo:

$$\boxed{valor - p = P\left(W \le w_0,\ cuando\ H_0\ es\ cierta\right)}$$

$$\boxed{valor - p = P\left(W \ge w_0,\ cuando\ H_0\ es\ cierta\right)}$$

Prueba acerca del Coeficiente de Correlación

Si queremos ver si realmente existe una medida de relación lineal entre dos variables *X* y *Y* en una población que tiene una distribución bivariada normal, la hipótesis será $H_o : \rho = 0$**.**

Usamos la estadística de prueba

$$\boxed{T = r\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}}$$

que tiene una distribución *t-Student* con *n-2* grados de libertad.

Si la población bivariada está lejos de una normal, podemos usar los rangos de las medidas de cada variable y calcular la medida de relación conocida como *coeficiente de correlación rangos de Spearman*

$$\boxed{r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n^3 - n}}$$

donde d_i es la diferencia entre los rangos de X y los de Y.

El valor crítico se busca en tablas de Coeficiente de Correlación de Rangos de Spearman

(Cf. J.H.Zar.- Biostatistical Analysis)

v.rohen

Referencias

http://ftp.medprev.uma.es/libro/html.htm

http://www.hrc.es/bioest/M_docente.html

http://ocw.jhsph.edu/Topics.cfm?topic_id=33

http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1199583/?tool=pubmed

Zar, Jerrold H.- Biostatistical Analysis.- 4rd ed.- Prentice Hall, Inc