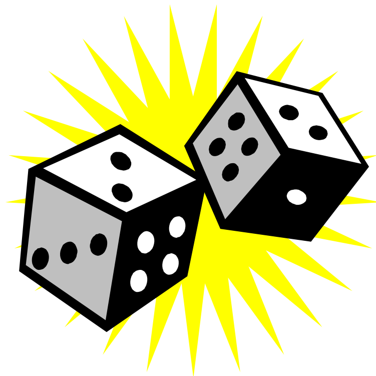
Variables Aleatorias

Al realizar un experimento aleatorio muchas veces, esperamos que los resultados obtenidos sean gobernados por sus probabilidades. Así las probabilidades forman un modelo de la realidad.



v.rohen

A un evento expresado numéricamente, se le conoce como Variable Aleatoria.

Las variables aleatorias se clasifican de acuerdo al tipo de valores que toman:

Discretas si puede tomar un número finito de valores, o infinito numerable, es decir si los valores que toma se pueden contar.

Continuas si puede tomar sus valores en un intervalo, es decir son valores que se miden.

v.rohen

Cada variable está asociada con un evento del espacio muestral y cada evento tiene asociada una probabilidad de ocurrencia. Al conjunto de estas probabilidades se le llama Distribución de Probabilidad.

La Distribución de Probabilidad de una variable aleatoria discreta se puede representar por medio de una gráfica, una tabla o una fórmula.

La variable aleatoria se escriben con MAYÚSCULAS (X, Y, Z) y el valor que toma con minúsculas (x,y,z)

v.rohen

Para cualquier distribución de probabilidad, se deben cumplir las siguientes propiedades:

- **Ninguna probabilidad puede ser negativa ni mayor a 1:**

$$\boxed{0 \leq P_X(x) \leq 1}$$

- **La suma de las probabilidades de todos los valores de la variable aleatoria X debe ser igual a 1:**

$$\boxed{P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_n) = 1}$$

v.rohen

La función de Distribución Acumulada de una variable aleatoria se define como:

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t=-\infty}^{x} P(X = t)}$$

si la variable aleatoria es discreta,

$$\boxed{F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt}$$

si la variable aleatoria es continua,
donde $f_X(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria X.

v.rohen

Propiedades de la función de Distribución Acumulada de una variable aleatoria

1. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$

2. $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

3. $\lim_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a)$ (continua por la derecha si es discreta)

4. Si x_1 y x_2 son dos valores cualesquiera que puede tomar la variable aleatoria X tal que $x_1 < x_2$ entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$

v.rohen

Notemos que para cualquier función de densidad, se deben cumplir las siguientes propiedades:

- $\boxed{0 \leq f_X(x) \leq 1}$

- $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1}$

v.rohen

Media de una Variable Aleatoria

La Media o Valor Esperado de una variable aleatoria es el promedio ponderado de todos los posibles valores de X, donde las ponderaciones son las probabilidades asociadas a cada valor de la variable:

$$\boxed{\mu = E[X] = \sum x\,P(X = x)}$$

para v.a. discretas

$$\boxed{\mu = E[X] = \int_x x\, f_X(x)\,dx}$$

para v.a. continuas

v.rohen

Algunas propiedades del Valor Esperado son las siguientes:

- Si k es una constante, $\boxed{E[k] = k}$

- $\boxed{E[kX] = kE[X]}$

- Si $g_1(X)$, $g_2(X)$, ..., $g_k(X)$, son k funciones de la variable aleatoria X,

$$\boxed{\begin{aligned} &E[g_1(X) + g_2(X) + \cdots + g_k(X)] = \\ &= E[g_1(X)] + E[g_2(X)] + \cdots + E[g_k(X)] \end{aligned}}$$

v.rohen

Varianza de una Variable Aleatoria Discreta

La Varianza de una Variable Aleatoria es el cuadrado de la dispersión promedio de los valores que toma la variable respecto a su media:

$$\boxed{\sigma^2 = Var(X) = E\left[(x_i - \mu)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) - \mu^2}$$

$$\boxed{\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^2 f_X(x) dx - \mu^2}$$

v.rohen

<u>Algunas propiedades de la Varianza son las siguientes</u>:

- $\boxed{Var(X) \geq 0}$

- **Si k es una constante,** $\boxed{Var(k) = 0}$

- $\boxed{Var(kX) = k^2 Var(X)}$

- **Si k y c son constantes,** $\boxed{Var(kX + c) = k^2 Var(X)}$

v.rohen

La Desviación Estándar es la raíz positiva de la varianza y nos proporciona una medida de la dispersión promedio respecto a la media

$$\sigma = de(X) = \sqrt{Var(X)}$$

v.rohen

Distribución Binomial

Uno de dos posibles resultados:

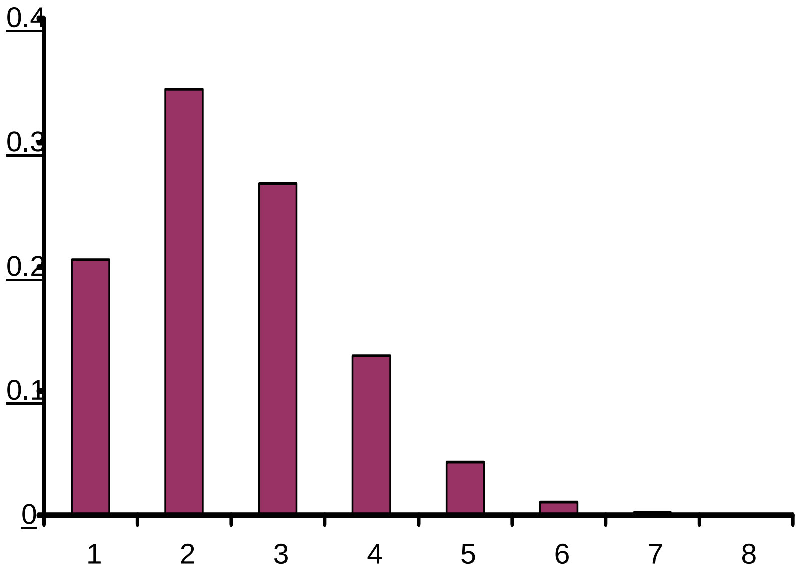
éxito   fracaso

n eventos independienes

Probabilidad de éxito (***p***) es constante

$$\binom{n}{x} p^{x} (1 - p)^{n - x}$$

$$x = 0,1,\ldots,n$$



v.rohen

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

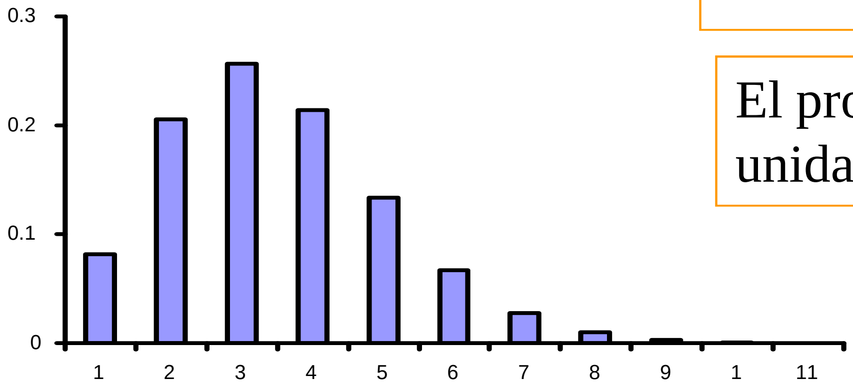
$x = 0,1, \ldots$

Eventos discretos en espacios continuos

La ocurrencia de dos eventos en un mismo momento no es posible

La ocurrencia de un evento en un momento es independiente de la ocurrencia de otro evento en cualquier otro momento

El promedio de eventos que ocurren en una unidad de tiempo es λ



Distribución Poisson

v.rohen

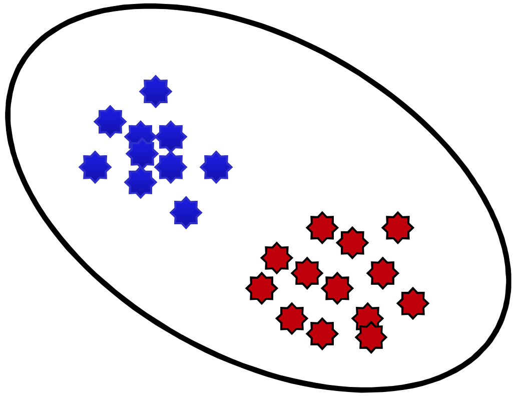
Distribución Hipergeométrica

La población contiene un número finito N de elementos que poseen una de dos características

Y es el número de elementos en una muestra que tiene la característica de interés

Media: nr/N

Varianza: $n\left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{n-r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$



$$P(y) = \frac{\binom{r}{y}\binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}$$

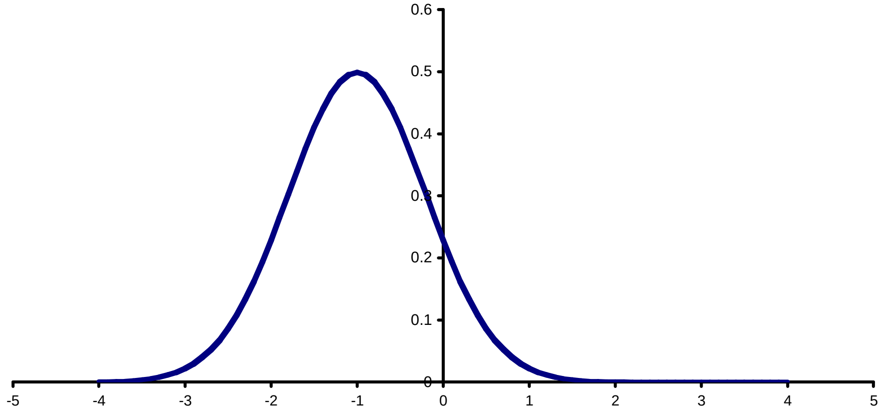
$y = 1, 2, \cdots, n$

$y \leq r, \quad n - y \leq N - r$

v.rohen

Distribución Normal

$$N(\mu, \sigma^2)$$



$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

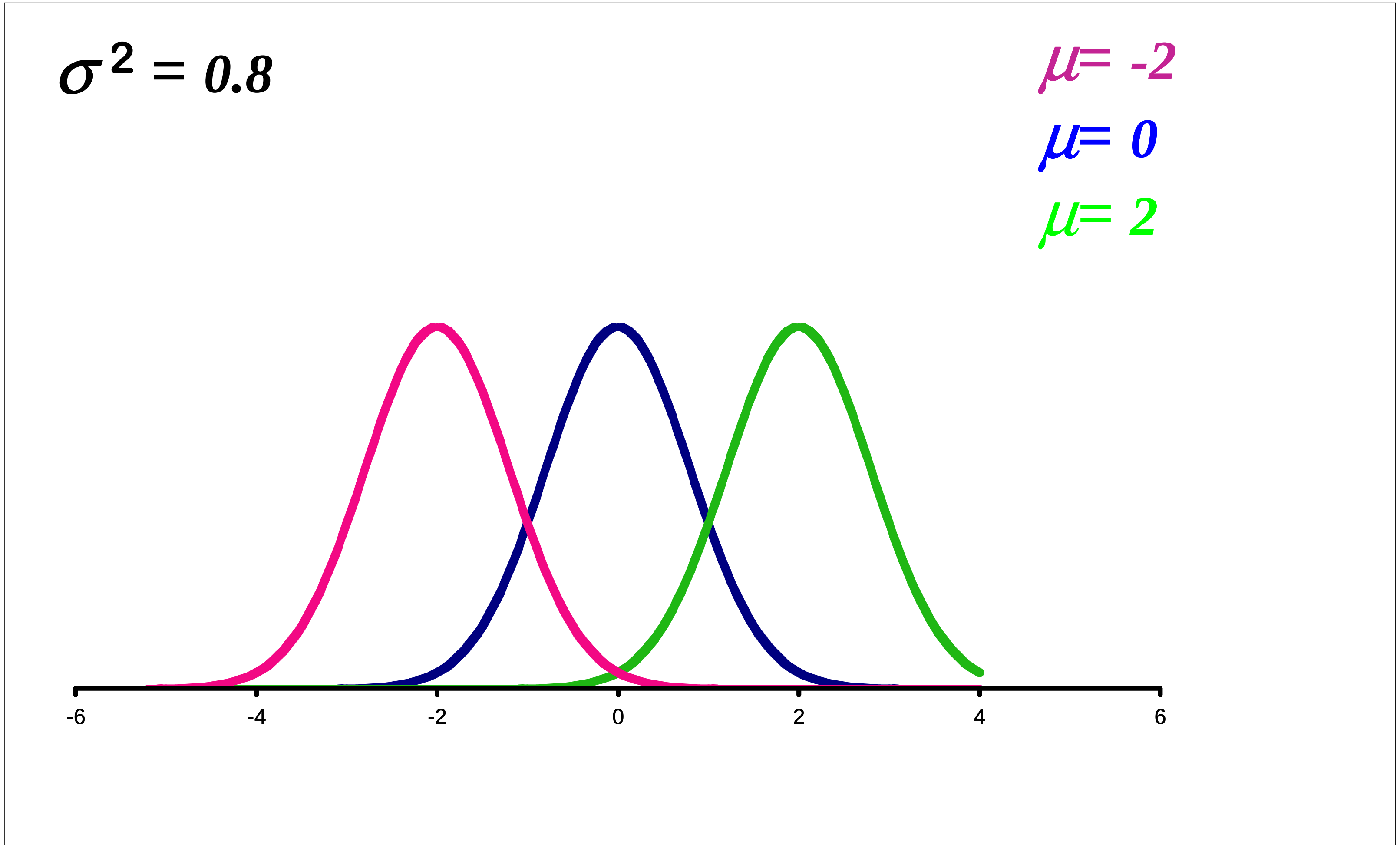
$$-\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

$$\sigma^2 > 0$$

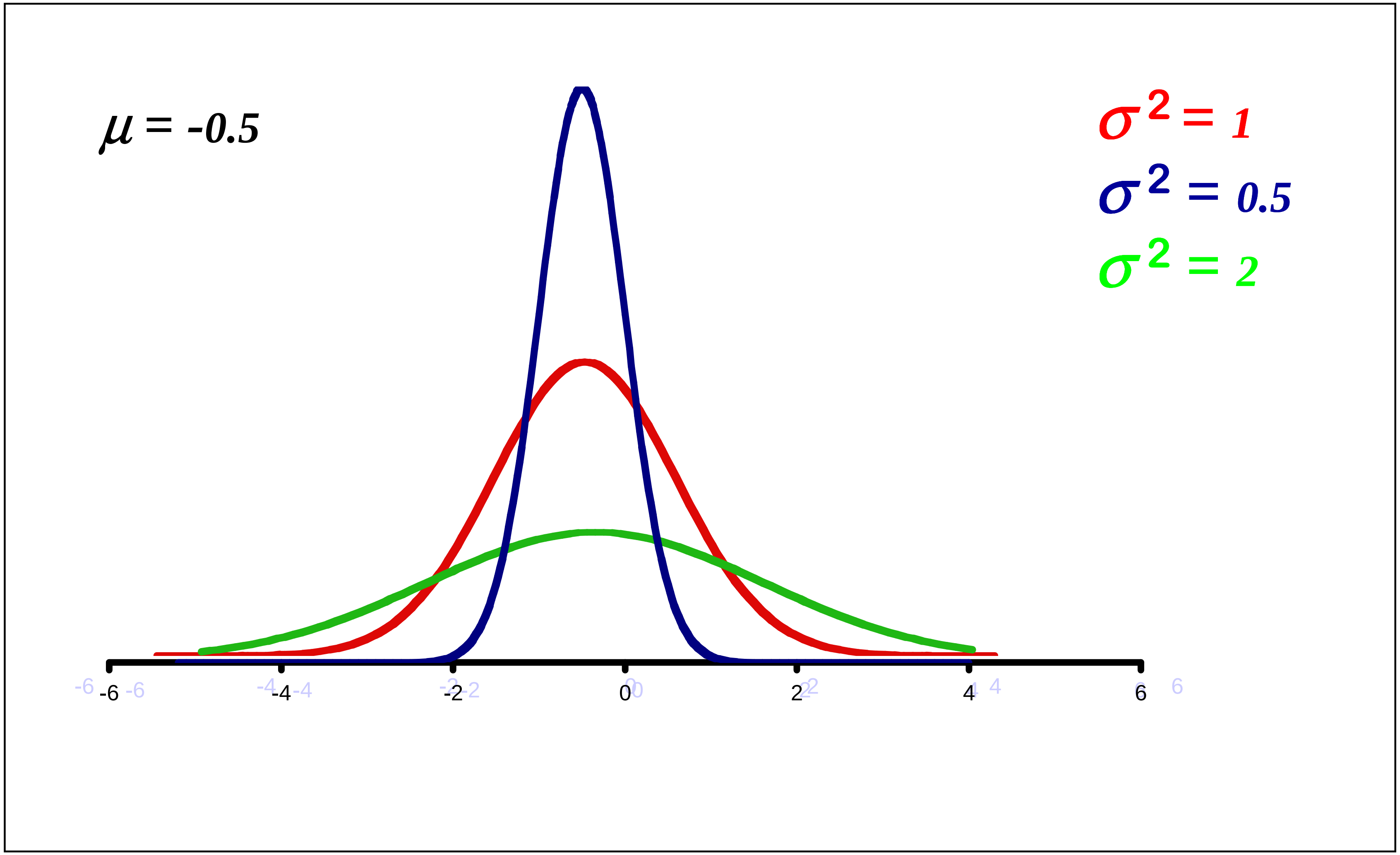
v.rohen

Algunos ejemplos de la distribución normal



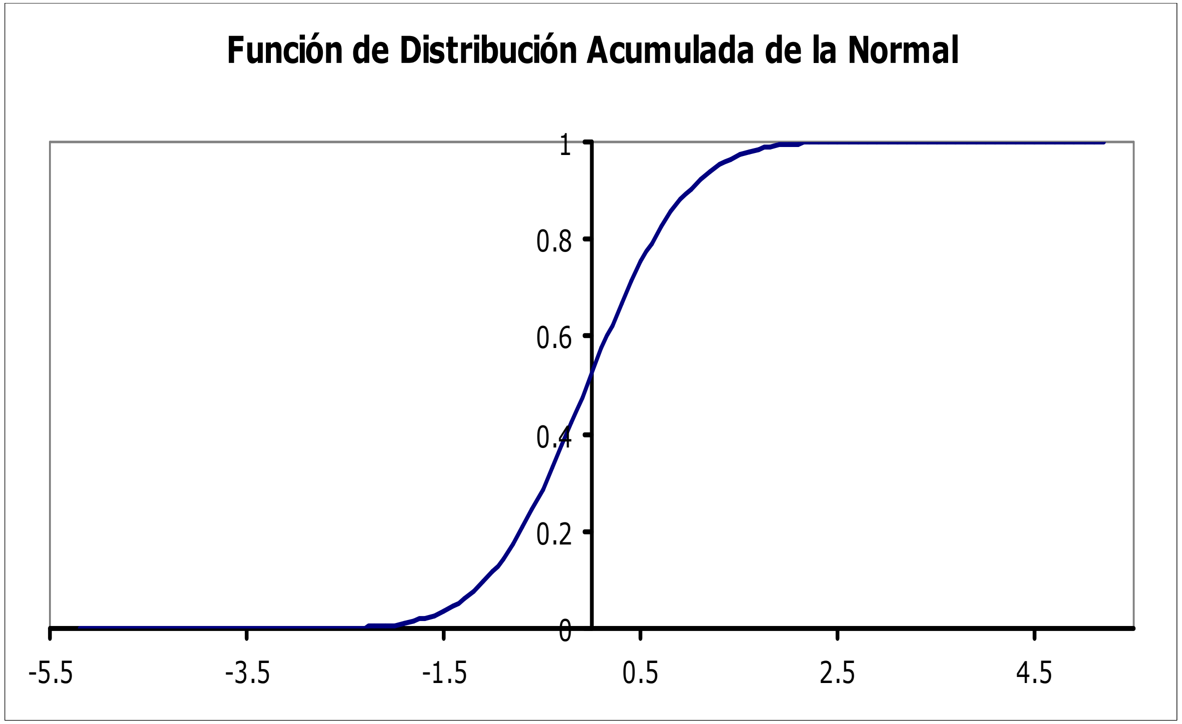
v.rohen

Más ejemplos de la distribución normal

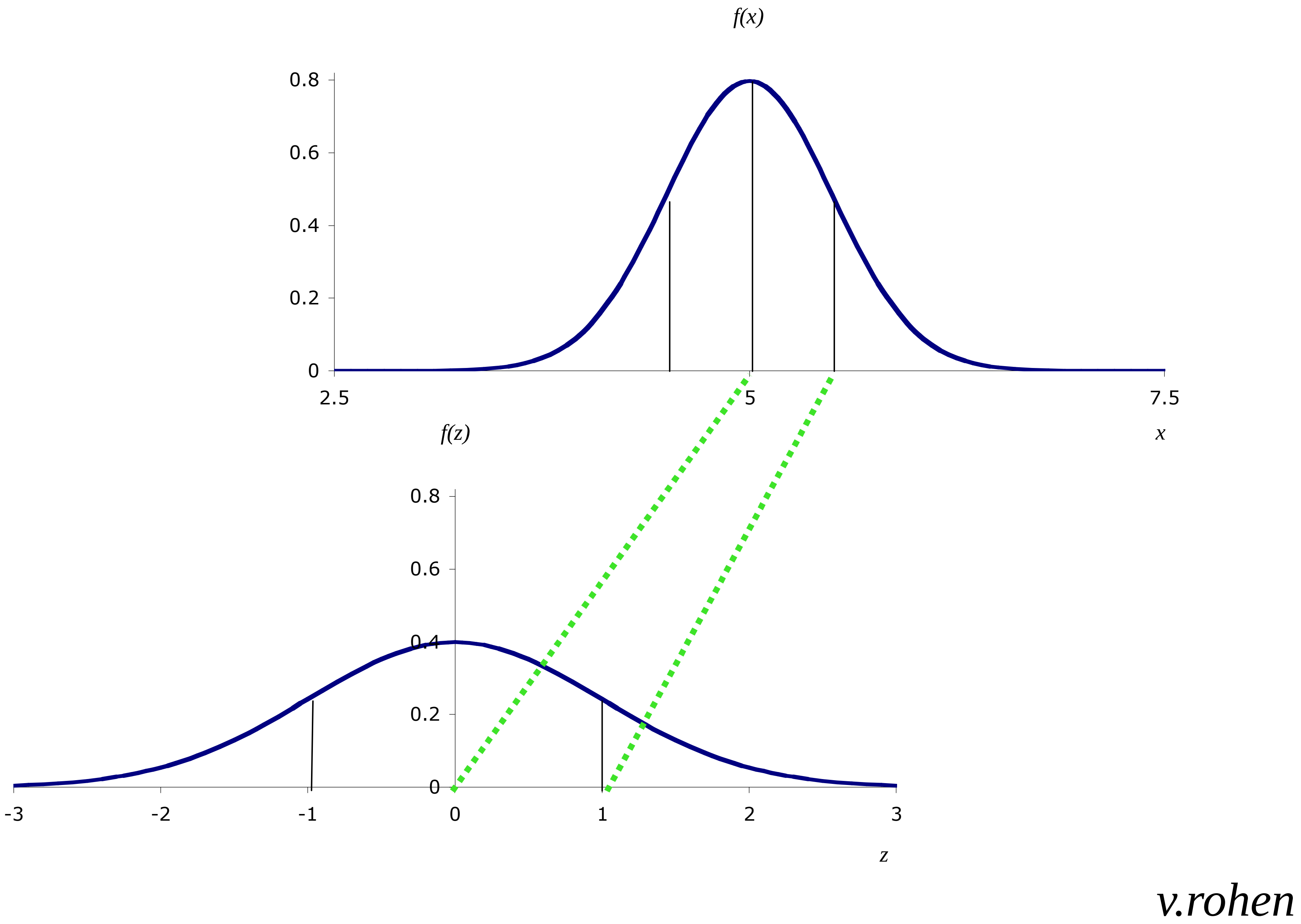


v.rohen

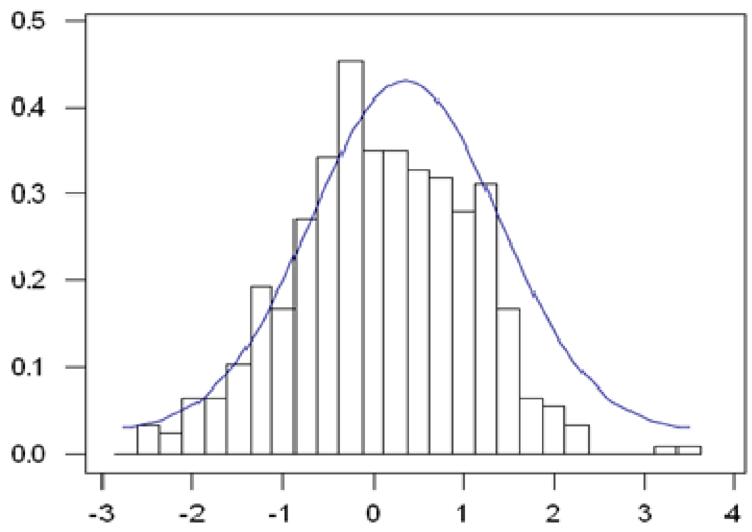
Función de Distribución Acumulada de la Normal Estándar



v.rohen


f(x)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
2.5
5
7.5
x
f(z)
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
z
v.rohen

Aproximación de la distribución Normal a la Binomial



v.rohen

Factor de corrección de la continuidad

$$\boxed{\begin{aligned} P(X \geq x_o) &\rightarrow P(X \geq x_o - 0.5) \\ P(X > x_o) &\rightarrow P(X \geq x_o + 0.5) \\ P(X \leq x_o) &\rightarrow P(X \leq x_o + 0.5) \\ P(X < x_o) &\rightarrow P(X \leq x_o - 0.5) \\ P(X = x_o) &\rightarrow P(x_o - 0.5 \leq X \leq x_o + 0.5) \end{aligned}}$$

Una vez corregido se procede a estandarizar, sustituyendo la media por $\boxed{np}$ y la desviación estándar por $\boxed{\sqrt{np(1-p)}}$

v.rohen

Referencias

http://www.hrc.es/bioest/M_docente.html

Woolf, P., C. Burge, A. Keating & M. Yaffe. *Statistics and Probability Primer for Computational Biologists*. Notas del curso BE 490/ Bio7.91, MIT, 2004. Disponible en http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Biology/7-91JSpring2004/7A958664-C748-4383-88F9-5547ED40637B/0/prob_stat_primer.pdf

Zar, Jerrold H.- Biostatistical Analysis.- 5th ed.- Prentice Hall, Inc

Rosner, B.- Fundamentals of Biostatistics. 6th Ed. Brooks/Cole Publishing Co., 2006